Intégrales Généralisées (Impropres)

Préambule : convergence séquentielle

Rappel : I int de $\mathbb{R}$
a adhérent à I (et) | $f : I \to G$

f possède une limite finie en a $\Leftrightarrow \forall (u_n) \in I^{\mathbb{N}}$ $(u_n) \to a$
$\Rightarrow f(u_n)$ CV

D/ Admis notion que, sous la condition de droite les $f(u_n)$ ont tous la m limite : si $u_n \to a$ $f(u_n) \to f(l)$
$v_n \to a$ $f(v_n) \to f(l')$

$w_{2n} = u_n$, $w_{2n+1} = v_n$

il vient $w_n \to a$ donc $\underbrace{f(w_n)}_{l''}$ CV $\to l$, $\to l'$ l égaux

donc $l = l'' = l'$

Th : $\hat{M}$ données : Pour que f possède une lim finie en a il faut (Cie) et il suffit que
a fini $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \eta > 0 \ \forall x, y \in [a-\eta, a+\eta]^2 \ |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

a infini $(+\infty)$ $\exists A \in \mathbb{R} \ \forall y \geq x \geq A \ |f(x) - f(y)| < \varepsilon$ (+)

D/ $a = +\infty$ CN : s'il existe $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$
Soit
et si l'on se donne $\varepsilon > 0$ $\exists A \in \mathbb{R}$

$\forall x \geq A \ |f(x) - l| \leq \varepsilon$

De là $\forall y \geq x \geq A$, $|f(y)-f(x)| \leq \underbrace{|f(y)-\ell| + |f(x)-\ell|}_{\leq 2\varepsilon}$

(C.S) Soit $x_n \in I^{\mathbb{N}}$ tq $x_n \to +\infty$; $\varepsilon > 0$, A vérifiant (*)

$\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_\varepsilon$ / $x_n \geq A$

Soit $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ tq $m \geq n \geq n_\varepsilon$, il vient $\left| \begin{array}{l} x_m \geq A \\ x_n \geq A \end{array} \right.$

donc $|f(x_m) - f(x_n)| \leq \varepsilon$

(CC) $(f(x_n))$ est de Cauchy donc elle converge. □

I Définition et premières propriétés

__Données__ : $I = [a, b[$ est un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{C}$ CPM
en $a < b$
(ie) $\forall S$ segment $\subset I$, $f_{|S}$ est CPM)

⚠ f C^0 par morceaux sur un ~~segment~~ intervalle fini $\not\Rightarrow$ borné

Soit $F : x \mapsto \int_a^x f = \int_{[a,x]} f$

__Déf__ On dit que f possède une intégrale généralisée sur $[a, b[$ lorsque F possède une limite finie en b

On dit aussi que $\underbrace{\int_a^b}$ f converge.
intégrale en tant que problème

~~Prop: $a' \in [a, b[$~~, Si $\int_a^{\to b} f$ CV, $\int_a^b = \lim_{x \to b} \underbrace{\int_a^x f}_{F(x)}$

__Prop__ Soit $a' \in [a, b[$, Alors :

$\Updownarrow$ $\int_a^b f$ converge, $\int_{a'}^b$ converge | dans ce cas

D/ $\forall x \in [a, b[$ $\int_{a'}^x f = \int_a^x f - \int_a^{a'} f$ (Chasles)

le résultat est alors immédiat

(T) "Primitive à l'infini" ($\to$ EDL, var des constantes)

$b = +\infty$ Si $\int_a^{+\infty} f$ converge, $G(x) = -\int_x^{+\infty} f$ est une primitive de f qui possède la lim 0 en $+\infty$

D/ Avec ce qui précède $\forall x \in [a, +\infty[$ $\int_a^x f + \int_x^{+\infty} f = \int_a^{+\infty} f$

$$-\int_x^{+\infty} f = \underbrace{\int_a^x f}_{\text{primitive de } f} - \underbrace{\int_a^{+\infty} f}_{\text{cste}}$$

Généralisation: $]a, b[\subset \mathbb{R}$ $]a,b[\xrightarrow{CPM} \mathbb{C}$

Alors $\forall (c, c') \in]a, b[$ $\left(\int_{\to a}^c f \text{ et } \int_c^{\to b} \text{ convergent}\right)$

$\Leftrightarrow \left(\int_{\to a}^{c'} f \text{ et } \int_{c'}^{\to b} f \text{ CV}\right)$

Dans le cas où ces choses:

$$\int_a^c f + \int_c^b f = \int_a^{c'} f + \int_{c'}^b f$$

⚠ On étudie séparément les bornes.

Ex : $\int_{-\pi}^{\pi} \tan x \, dx = 0$ car tg est impaire $\Big\{$ aucun sens
$-\pi/2, \pi/2$, $|\tan x| \to \infty$

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x|x-1||x-2|}}$$ "singularités" $0, 1, 2, +\infty$

II Cas des fonctions positives :

Th : Soit f CPM$([a,b[, \mathbb{R})$. Si f est positive on a :

a) f possède une intégrale généralisée sur $[a,b[$
b) les intégrales $\int_S f$, S segment $\subset [a,b[$, sont bornées
c) $F(x) : x \mapsto \int_a^x f$ est majorée sur $[a,b[$

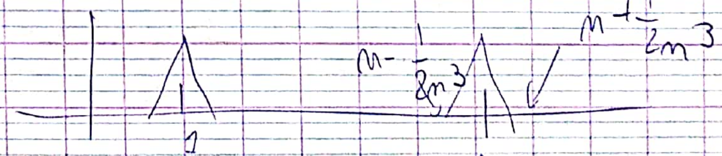
D/ Comme f est positive, $F : x \to \int_a^x f$ est croissante sur $[a,b[$

donc $\int_a^{\to b} f$ converge $\Leftrightarrow$ F possède une limite en b
$\Leftrightarrow$ F est majorée sur $[a,b[$

On a prouvé a) $\Leftrightarrow$ c). Il est clair que b) $\Rightarrow$ c) avec les segments $[a,x]$. Puis si $[y,z] \subset [a,b[$, et si $y \le z$

$$\int_y^z f \le \int_a^z f \le \underbrace{\int_a^b f}_{F(x) \to \int_a^b f}$$

⚠ Soit f



$f|[n-\frac{1}{2n^3}, n+\frac{1}{2n^3}]$ est APM, $f(n) = n$, $f(n \pm \frac{1}{2n^3}) = 0$

Soit $x \geq 0$: $\int_0^x f \leq \int_0^{N+\frac{1}{2N^3}} \leq \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^2}$ CV
si $N > x$ $\leq \frac{\pi^2}{12}$

→ Ainsi $\int_0^{+\infty} f$ converge mais f n'est pas bornée

Comparaison Soient $f, g\ [a,b[\to \mathbb{R}^+$ positives

1) si $f \leq g$ $\left(\int_a^b g \text{ CV} \Rightarrow \int_a^b f \text{ CV} \right)$
$\left(\int_a^b f \text{ DV} \Rightarrow \int_a^b g \text{ DV} \right)$

2- Si $f = O(g)$, $\int_a^b g$ CV $\Rightarrow \int_a^b$ CV

3- si $f \sim g$ $\int_a^b$ CV $\Leftrightarrow \int_a^b$ CV

D/ 1) * Si $\int_a^b g$ CV alors il vient

$\forall x \in [a,b[$ $\int_a^x f \leq \int_a^x g \underset{g \geq 0}{\leq} \int_a^b g$

donc $x \mapsto \int_a^x f$ est majorée donc CV

* Contraposée, ou même $\int_a^x f \to +\infty \Rightarrow \int_a^x g \to +\infty$

2- $\exists\, b' \in [a,b[\ \exists M > 0$ tq $\forall x \in [b', b[$ $0 \leq f(x) \leq M g(x)$

De là $\int_{b'}^b g$ CV $\Rightarrow \int_{b'}^b M g$ CV $\Rightarrow \int_{b'}^b f$ CV
$\Rightarrow \int_a^b f$ CV

3) $f \sim g \Rightarrow f = O(g)$ et $g = O(f)$ OK.

RM : $f, g > 0$ f/g bornée | g/f bornée

$0 < A \leq f/g \leq B$ mais ne dit pas que $\frac{f}{g} \to 1$

III Critère de Cauchy (HP)

Thm : Soit f $[a, +\infty[$ $\xrightarrow{CPM}$ $\mathbb{C}$. Alors

$$\int_a^{+\infty} f \text{ converge} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0\ \exists A > a\ \forall y > x > A \left|\int_x^y f\right| \leq \varepsilon \quad (2)$$

D/ $F(x) = \int_a^x f$ (1) $\Leftrightarrow \exists \lim_{\infty} F$

$$(2) \Leftrightarrow \underbrace{\forall \varepsilon > 0\ \exists A > a\ \forall y > x > A\ |F(y) - F(x)| < \varepsilon}_{\text{Critère de Cauchy pour } F \text{ en } +\infty}$$

et donc (1) et (2) sont équivalents.

Ex : 1) Soit $f \in CPM(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ $G(x,y) = \int_x^y f$

Mq $\int_{\mathbb{R}} f$ CV

$\Updownarrow$

$\exists \lim\limits_{\substack{x \to -\infty \\ y \to +\infty}} G(x,y) \rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists A < 0\ B > 0$ $\begin{matrix} x < A \\ y > B \end{matrix} \Rightarrow |G(x,y) - l| < \varepsilon$

D/ $\Downarrow$ $\int_{-a}^0 f = \lambda$ $\int_0^{+\infty} f = \mu$

Soit $\varepsilon > 0$, il existe $A < 0$ $\forall x < A$ $\left|\int_x^0 f - \lambda\right| < \varepsilon$

$\Uparrow$ $\left|\int^y f - \mu\right| < \varepsilon$

Chasles $|G(x,y) - (\lambda + \mu)| < \left|\int_x^0 f - \mu\right| + \left|\int_0^y f - \lambda\right|$

$< 2\varepsilon$

Ex : $\int_x^y f \underset{\substack{x \to -\infty \\ y \to +\infty}}{\longrightarrow} L$

On montre le critère de cauchy en $+\infty$ (via ...) Soit $\varepsilon > 0$

$\exists A_\varepsilon > 0 \ \forall x \leq -A_\varepsilon \ \forall y \geq A_\varepsilon$ $\left| \int_x^y f - L \right| \leq \varepsilon$

Si $y' > y \geq A_\varepsilon$ $\left| \int_{-A_\varepsilon}^{y'} f - \int_{-A_\varepsilon}^{y} f \right| \leq \left| \int_{-A_\varepsilon}^{y'} f - L \right| + \left| L - \int_{-A_\varepsilon}^{y} f \right|$ $\leq 2\varepsilon$

—— $\left| \int_y^{y'} f \right| \leq \varepsilon$ on a bien le CC en $+\infty$

Négation $\exists \varepsilon_0 > 0 \ \forall A \ \exists y > x > A$ $\left| \int_x^y f \right| \geq \varepsilon$

IV Intégrabilité

Déf: Soit $f : I \xrightarrow{CPM} \mathbb{C}$. On dit que f est intégrable sur I

si $\int_I |f|$ converge (on dit aussi $\int_I f$ est absolument convergente)

donc ceci revient à dire que la famille $\left\{\int_S |f|, S \text{ segm}\right\}$

est bornée

Prop: si f réelle est intégrable sur I alors $\int_I f$ converge

et $\left|\int_I f\right| \leq \int_I |f|$

D/ ① Positivité $f = f^+ - f^-$ où $f^+ = \frac{1}{2}(|f| + f) \geq 0$

$f^- = \frac{1}{2}(|f| - f) \geq 0$

$f^+ + f^- = |f|$

On a $0 \leq f^+ \leq |f|$

donc par domination $\int_I f^+$ converge, idem pour

Pour f à valeurs complexe on sépare f à valeurs réelles et imaginaires

② $I = [a, b[$ par ex. Soit $\varepsilon > 0$ $\int_a^b |f|$ converge donc

$\exists b_\varepsilon \in [a, b[, \forall (x, y) \in [b_\varepsilon, b[$, $x \leq y$ $\int_x^y |f| \leq \varepsilon$

De là $\left|\int_x^y f\right| \leq \int_x^y |f| \leq \varepsilon$

La dernière inégalité vient par passage à la limite légitime

Prop $L^2(I) = \{f \in CPM(I,\mathbb{C}) \mid \int_I |f| < +\infty\}$ est un ev

De plus, si g est bornée CPM sur I et $f \in L^1 I$

$g \times f \in L^1(I)$

D/ 1er point $|f+g| \leq |f| + |g|$ + domination
2ème point $|fg| \leq \|g\|_\infty |f| \to$ dom

RM : si $f = O(g)$, $L^1(I) \Rightarrow f \Rightarrow L^1(I)$

Cas particulier important Si f est CPM et bornée sur I borné

Alors $f \in L^1(I)$

D/ Soit $M = \|f\|_\infty$; $I = [a,b[$; $-\infty < a < b < +\infty$

$\int_a^x M = M(x-a)$ CV lorsque $x \to b$

donc par domination $\int_I |f|$ CV

Ex : CV et Calcul de $\int_0^1 \left(\frac{1}{x} - E\left(\frac{1}{x}\right)\right) dx$

S/ $f : \frac{1}{x} - E\left(\frac{1}{x}\right)$ est CPM sur $]0,1]$

Elle est bornée par 1, elle y est donc intégrable

donc $f \in L^1(]0,1])$. Soit $I_n = \int_{1/n}^1 f(x)\,dx$

On a $I_{n \geq 2} = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} f = \sum_{k=1}^{n-1} \left[\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \times (-k) + \ln(k+1) - \ln(k)\right]$

$= \ln(n) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \to 1-\gamma$

I Intégration des relations de comparaison

Ex: 1) $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ CV ssi $\alpha > 1$ en effet $\int_1^x \frac{1}{t}dt = \ln x \to \infty$

$\alpha \neq 1$: $\int_1^x \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}\left[x^{1-\alpha} - 1\right]$ a une limite ssi $\alpha > 1$

2) $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t(\ln t)^\beta}$ CV ssi $\beta > 1$ $\int_2^x \frac{dt}{t \ln t} = \ln(\ln x) - \ln(\ln 2) \to \infty$

$\beta \neq 1$ $\int_2^x \frac{dt}{t \ln^\beta t} = \frac{1}{1-\beta}\left[(\ln(\ln x))^{1-\beta} - (\ln(\ln 2))^{1-\beta}\right] \not\to \infty$ ssi $\beta > 1$

Ex:

Si $\alpha > 1$ $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha (\ln(t))^\beta}$ CV Soit $1 < \gamma < \alpha$

On regarde $t^\gamma \left(\frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta}\right) = \frac{1}{t^{\alpha-\gamma}(\ln t)^\beta} \to 0$

donc $\frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta} = o\left(\frac{1}{t^\gamma}\right) \leftarrow$ CV

$\alpha < 1$ alors $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha \ln(t)^\beta}$ $o\left(\frac{1}{t^\alpha \ln(t)^\beta}\right) = \frac{1}{t}$ car $\frac{t}{t^\alpha (\ln t)^\beta} \to \infty$

En 0^+ : $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ CV ssi $\alpha < 1$ | $\int_\lambda^1 \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}\left(1 - \lambda^{1-\alpha}\right)$

Appl: $\forall \beta \in \mathbb{R}$ $\int_0^{1/2} |\ln(t)|^\beta dt$ CV

En effet $\sqrt{t}\,|\ln t|^\beta \to 0$ donc $\exists \delta > 0$ $\forall t \in]0, \delta]$ $|\ln t|^\beta \leq \frac{1}{\sqrt{t}}$ il y a CV par domination

Critère pratique : $t^\alpha f(t) \to L$ finie | $\alpha > 1$ $\int^{+\infty} f$ CV
| $\alpha < 1$ et $L \neq 0$ $\int^{+\infty} f$ DV

par ex $L < 0$, $f(t) < 0$ pour t assez grand avec $t^\alpha f(t) < \frac{L}{2}$
$-f(t) > \frac{L}{2t^\alpha}$

E

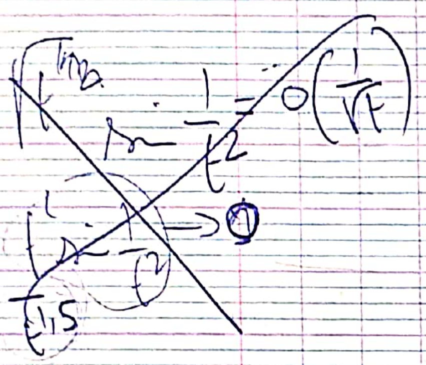
$e^{\lambda} = \sum \frac{\lambda^k}{k!}$

<u>Ex:</u> (I) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ avec $Re(\lambda) > 0$; $\alpha > 0$; $f \underset{+\infty}{=} O(P)$ où P est un polynôme

$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t^{\alpha}} f(t)\,dt$ est ACV

D/ $\exists M > 0\ \exists A > 0\ \forall t \geq A\ |f(t)| \leq M|P(t)|$

$|e^{-\lambda t^{\alpha}} f(t)| = \underbrace{e^{-Re(\lambda)t^{\alpha}}|f(t)|}_{g(t)} \leq e^{-Re(\lambda)t^{\alpha}}|P(t)|$



donc $g(t) = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$

Ex: $\int_{-\infty} \frac{dt}{|t-a|^{\alpha}}$ CV ssi $\alpha < 1$

<u>Exercices:</u> (1) $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{(\ln t)^{\ln t}}$ singularité 1 et $+\infty$

$(\ln t)^{\ln t} \to 1$: n'est pas une sing

en $+\infty$, dès que $\ln(\ln(t)) \geq 2$ $(t \geq e^{e^2})$ $0 \leq f(t) \leq \frac{1}{t^2}$

la intégrale CV

(2) $\int_0^{+\infty} \sin\frac{1}{t^2}\,dt$ CV | En 0^+ $f(t)$ est bornée sur $]0,1]$
| en $+\infty$ $|f(t)| \leq \frac{1}{t^2}$ au V de $+\infty$

③ $\displaystyle\int_0^{+\infty} \underbrace{\operatorname{Arctg}(1+t^3) - \operatorname{arctg}(t^3)}\, dt$

$$\left|\operatorname{Arctg}\left(\frac{1}{t^3(1+t^3)}\right)\right| < \frac{1}{t^3(1+t^3)} \quad CV$$

④ $\displaystyle\int_0^{+\infty} \underbrace{\frac{dx}{\sqrt{x|x-1||x-2|}}}$

en 0^+ $f(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2x}}$

en $+\infty$ $f(x) \sim \frac{1}{x^{1,5}}$

en 1^+ $f(x) \sim \frac{1}{\sqrt{x-1}}$

en 2^+ $f(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2|x-2|}}$

⑤ ~~P est un polynôme réel de degré 3.~~
~~Nature de~~ $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{|P(x)|^{1/2}}$

~~α, β, γ rac~~

en $\pm\infty$ $|P(x)| \sim A|x|^{3/2}$ $A > 0$, $\frac{1}{|P(x)|^{1/2}} \sim \frac{1}{A|x|^{3/2}}$

il y a CV

~~α, β, γ rac~~

si P possède une racine réelle avec mult. α
au voisinage A $|P(x)|^{1/2} \sim C|x-\alpha|^{1/2}$ CV

si P possède 3 racines réelles a, b, c
1 racine triple DV

1 racine double DV
3 racines simples CV

- $a \in \mathbb{R}$ $\int_0^1 \frac{t^a - 1}{\ln t} dt$

VI I Intégration par parties

On suppose f et g de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b[$ il vient

$\forall x \in [a,b[, \int_a^x f'g = [fg]_a^x - \int_a^x fg'$

De là Si fg possède une lim finie b^-

on a $\int_a^{\to b} f'g$ CV $\iff \int_a^{\to b} fg'$ CV

Ex: $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ | CV en 0^+ il y a une lim finie

en $+\infty$ $\int_1^X \frac{\sin t}{t} dt = \left[\frac{-\cos t}{t}\right]_1^X - \int_1^X \frac{\cos t}{t^2} dt$

$\left|\frac{\cos t}{t^2}\right| \leq \frac{1}{t^2}$

2 intégrales CV

~~Si P possède une racine réelle~~

on prouvera $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$

Ex: Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$

$\int_\varepsilon^X \frac{\sin t}{t} dt = \left[\frac{1-\cos t}{t}\right]_\varepsilon + \int_\varepsilon^X \frac{1-\cos t}{t^2} dt$

$\varepsilon \to 0^+$ 0

$X \to +\infty$ 0

$\int_\varepsilon^x \frac{2\sin^2(t/2)}{t^2}$

60

$$\int \dots = \int_{\varepsilon}^{X} \frac{\sin^2 t/2}{t^2/4}\, d(t/2) = \int_{\varepsilon/2}^{X/2} \frac{\sin^2 u}{u^2}\, du$$

① $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$ est semi convergente

$$\int_{\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt = \sum_{k=1}^{n} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt \geq \sum_{k=1}^{n} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin t|}{(k+1)\pi}$$

KM $\int_{\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t} dx \leq \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ $\Big| = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k+1} \to \infty$

$$I_n \sim \frac{2}{\pi} \log n$$

Ex: Nature de $\int_1^{+\infty} \frac{e^{it}}{t^\alpha} dt$

$\alpha > 0$ $\int_1^X \frac{e^{it}}{t^\alpha} = \left[\frac{-ie^{it}}{t^\alpha}\right]_1^X - \int_1^X \frac{ie^{it}}{t^{\alpha+1}} dt$

$\left|\frac{ie^{it}}{t^{\alpha+1}}\right| = \frac{1}{t^{\alpha+1}}$ avec $\alpha+1 > 1 \to$ intégrable.

$\alpha \leq 0$ $\alpha = 0$ OK $\alpha = -\beta$ $\beta > 0$

$$\mathrm{Im}\left(\int_{2n\pi - \pi/4 + \pi/2}^{2n\pi + \pi/4 + \pi/2} t^\beta e^{it} dt\right) = \int_{2n\pi - \pi/4 + \pi/2}^{2n\pi + \pi/4 + \pi/2} t^\beta \sin t\, dt$$

$$\geq \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{2n\pi - \pi/4 + \pi/2}^{2n\pi + \pi/4 + \pi/2} t^\beta \sin t\, dt$$

coco

$$\left|\int_{2n\pi - \pi/4 + \pi/2}^{2n\pi + \pi/4 + \pi/2} t^\beta e^{it} dt\right| \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\pi}{2}$$

Ex: Soit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^0$ périodique MQ

$\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt$ CV $\iff$ f possède une prim périodique

S/ $\Leftarrow$ f possède une primitive périodique MQ

~~$\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,dt$ CV $\Leftrightarrow$ f possède une primitive périodique~~

S/ $\int_1^{x} \frac{f(t)}{t}\,dt = \left[\frac{F(t)}{t}\right.$ ― ― ―

$\Rightarrow$ f admet une primitive périodique $\Leftrightarrow \int_0^T f$

$\rightarrow$ si $\int_0^T = 0$, il vient $\forall x \in \mathbb{R}$ $\int_x^{x+T} f = 0$

Si $\int_0^T f \neq 0$ on pose $C_0(f) = \int_0^T f$ soit $g = f - C_0(f)$

il vient $\int_0^T g = 0 = \int_0^T f - T C_0 f$ $\left\{ \int_1^x \frac{f(t)}{t}\,dt = \int_1^x \frac{C_0 f}{t}\,dt + \int_1^x \frac{g(t)}{t}\,dt \right.$ CV

$\frac{f(t)}{t} < \frac{f(t)}{f(t)}$

VII Découpe :

TR : Soit $f \in \mathcal{C}([0,+\infty[, \mathbb{C})$. Soit $a_n \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ avec $a_n \nearrow +\infty$. Alors

$$\int_0^{+\infty} |f| \text{ CV} \Leftrightarrow \sum_n \int_{a_n}^{a_{n+1}} |f| \text{ CV}$$

$a_0 > 0$

$\Rightarrow$ $\int_{a_0}^{a_{n+1}} |f|$ CV par Hyp

$\Leftarrow$ Soit $F : x \longmapsto \int_0^x |f|$. ~~Et~~ On sait $F \nearrow$ et que $F(a_n)$ converge en $+\infty$

On a donc $\begin{cases} F(x) \to \ell \text{ finie en } +\infty \text{ OK} \\ F(x) \to +\infty \text{ mon lim } F(x_n) \to \ell \text{ OK} \end{cases}$

⚠ Si f n'est pas positive, contre-exemple : $\begin{cases} f(x) = \sin x \\ a_n = 2\pi n \end{cases}$

Ex : CV et calcul de $\int_1^{+\infty} \frac{t - [t]}{t^2}$

$$\int_n^{n+1} \frac{t-[t]}{t^2} \, dt = \int_n^{n+1} \frac{dt}{t} - n \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^2} = \log(n+1) - \log(n) - n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$\sum a_n$ CV

$$\sum a_n = \log(n+1) + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

$\Sigma \to 1 - \gamma$

② On suppose que $f : \mathbb{R}_+ \xrightarrow{C^0} \mathbb{R}$; $f \geq 0$, $f \downarrow$

MQ $\int_0^{+\infty} f(t) \sin^2 t \, dt$ CV $\Leftrightarrow \int_0^{+\infty} f(t) \, dt$ CV

$\Rightarrow$ $a_n = n\pi$, $\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(t) \sin^2(t) \geq f((n+1)\pi) \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \sin^2 t \, dt$

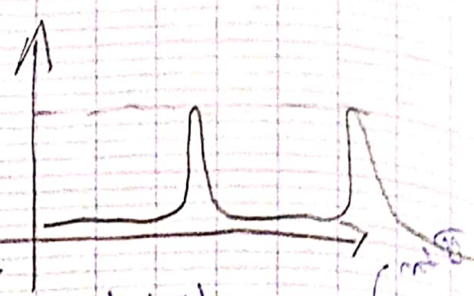
$$= \frac{\pi}{2} f((n+1)\pi)$$

Bilan : $\sum \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(t) \sin^2 t$ CV $\Rightarrow \sum f((n+1)\pi)$ CV

Or $f \downarrow \Rightarrow f((n+1)\pi) \geq \frac{1}{\pi} \int_{(n+1)\pi}^{(n+2)\pi} f(t) \, dt$

donc $\sum \int_{(n+1)\pi}^{(n+2)\pi} f$ CV et $\int_0^{\infty} f$ CV

Ex: $\int_0^{+\infty} e^{-x^2|\sin x|}\,dx$



S/ $\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x^2|\sin x|} \leqslant \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-n^2\pi^2|\sin x|}\,dx = \int_{n\pi} e^{\ldots}$

$\int_{n\pi}^{\pi} e^{-a|\sin x|}\,dx = 2\int_0^{\pi/2} e^{-a\sin x}\,dx$

$\leqslant 2\int_0^{\pi/2} e^{-a\frac{2}{\pi}x}\,dx$

$\int_0^{\pi/2} e^{-a\frac{2}{\pi}x}\,dx \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-\left(a\frac{2}{\pi}\right)x}\,dx = \frac{1}{n^2\pi^2\frac{2}{\pi}} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$

(CC) $\sum \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x^2|\sin x|}\,dx$ CV, or la fct est $\geqslant$ donc

cf: l'intégrale CV

VIII Comportements à l'infini

En général on ne peut rien dire

$$\int_1^{+\infty} e^{ix^2}\,dx = \int_1^{A^2} \frac{e^{iu}}{2\sqrt{u}} \underset{IPP}{=} \left[\frac{e^{iu}}{2i\sqrt{u}}\right]_1^{A^2} + \underbrace{\int_1^{A} \frac{e^{iu}}{4iu^{3/2}}}_{CVA}$$

$\Rightarrow I$ converge

$\forall t \geq A$ $f(t) < \frac{\varepsilon}{2}$ ... $\forall t \geq A$ $f(t) > \frac{\ell}{2}$

Prop: Si $\int_0^{+\infty} f$ CV et si $\exists \lim_{t\to+\infty} f(t) = \ell$, alors $\ell = 0$

D/ (Très utile), On raisonne par l'absurde on suppose $\ell \neq 0$, en changeant f en $-f$ on suppose $\ell > 0$
$f \to \ell$ $\exists A > 0$ $\forall t \geq A$, $f(t) \geq \ell/2$. $\int_A^x f \geq \int_A^x \frac{\ell}{2} = \frac{\ell}{2}(x-A) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$

Ex: Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{C})$ on suppose $\int_0^{+\infty} f$ CV
et $\int_0^{+\infty} |f'|$ { transformée de Fourier } $\Rightarrow f \xrightarrow[+\infty]{} 0$

$\int_0^{+\infty} |f'|$ CV $\Rightarrow \int_0^{+\infty} f'$ CV donc f CV, d'après ce qui précède $f \to 0$

Ex: On suppose que $f \searrow$ et $\int_0^{+\infty} f$ CV, Mq $x f(x)$ CV vers 0

S/ Mq f est positive (?) Sinon $\exists t_0 > 0$ $f(t_0) < 0$
(DOABLE)

Cela étant: on applique le critère de Cauchy
Soit $\varepsilon > 0$ $\exists A > 0$ tq $\forall y > x > A$ $\left|\int_x^y f\right| \leq \varepsilon$

$x = y/2$ $(y \geq 2A)$ il vient: $0 \leq \frac{y}{2} f(y) \leq \int_{y/2}^{y} f(t)\,dt \leq \varepsilon$
O.K.

Ex: (Très utile) Soit $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ uniformément continue et tq $\int_0^{+\infty} f$ CV Mq $f \xrightarrow[+\infty]{} 0$

S/ $\exists \varepsilon > 0 \ \exists x_n \nearrow +\infty \ \forall n \in \mathbb{N} \ f(x_n) \geq \varepsilon$

Parmi les $f(x_n)$ une infinité vont avoir le même signe

quitte à extraire de x_n on suppose $\forall n \in \mathbb{N}$

changer f en $-f$

f est unif $\mathcal{C}^0$: $\exists \eta > 0 \ \forall s, t \in \mathbb{R}_+ \ |s-t| < \eta \Rightarrow |f(s) - f(t)|$

Ainsi si $t \in [x_n - \eta, x_n + \eta]$

alors $f(x_n) - f(t) \leq \varepsilon/2$

$f(t) \geq \varepsilon/2$

donc $\forall n \in \mathbb{N} \ \int_{x_n - \eta}^{x_n + \eta} f \geq \int_{x_n - \eta}^{x_n + \eta} \varepsilon/2 = 2\varepsilon\eta$

négation du crit de Cauchy.

<u>CP</u> f <u>LIP</u>

<u>Ex</u>: Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ tq $\begin{cases} \int_0^{+\infty} f \ CV \\ \int_0^{+\infty} f'^2 \ CV \end{cases}$ Mq $f \xrightarrow[+\infty]{} 0$

S/ Soit $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$

Soit $x < y$ $|f(y) - f(x)| \leq \left| \int_x^y f'(t) dt \right| \leq \left| \int_x^y \right|^{1/2}$

et donc $|f(y) - f(x)| \leq \sqrt{y-x}\left(\int_0^{+\infty} f'^2\right)^{1/2}$

si $0 < y-x < \varepsilon^2$, on obtient $|f(y) - f(x)| \leq C\varepsilon$

f est UC /